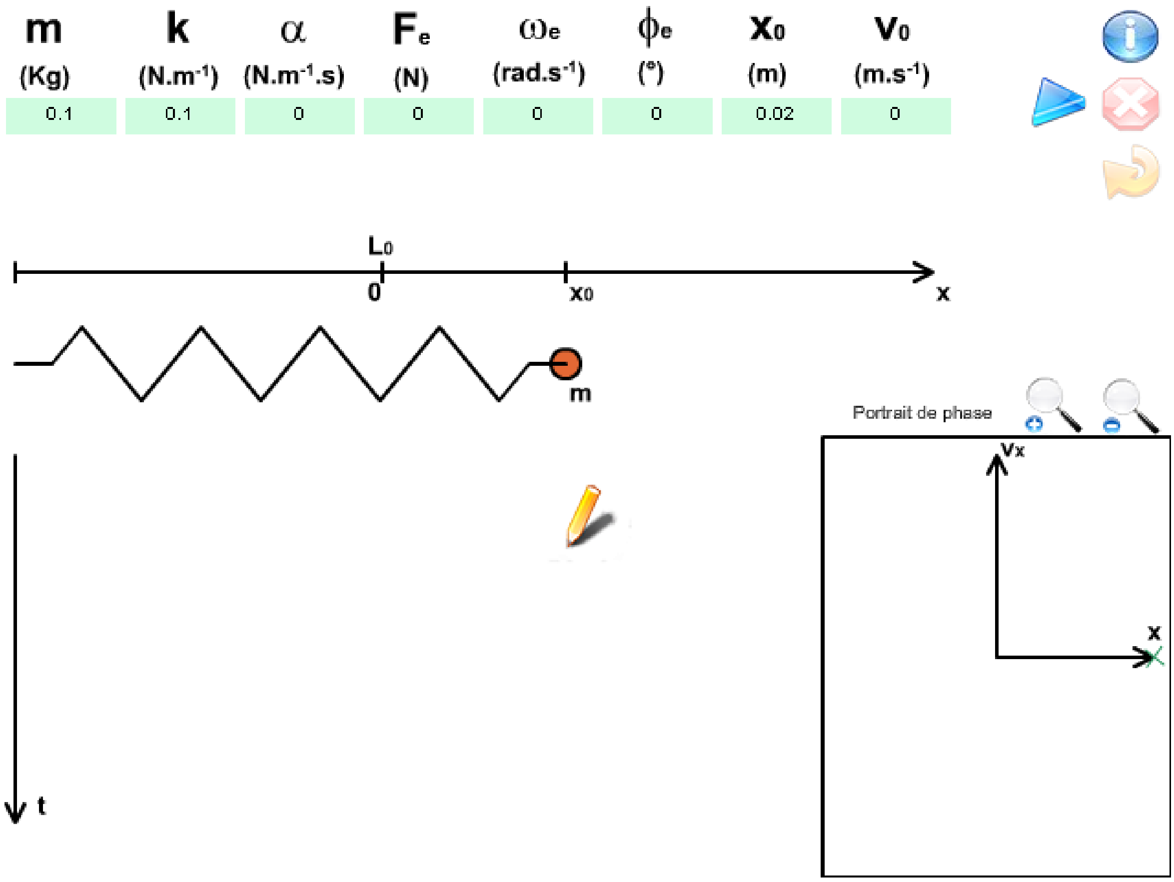
Phénomène de résonance - oscillations entretenues

A l'aide du simulateur localisé ici :
http://www.crystallography.fr/crm2/fr/labo/pages_perso/Aubert/Meca/sommaireMeca.html
on propose une découverte qualitative puis quantitative de différents phénomènes liés aux oscillations.



Le système physique étudié est le suivant : une masse m (disque orange) est assujettie à se déplacer le long d'un axe horizontal Ox muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_x$ orienté vers la droite. Ce mobile est soumis aux forces suivantes, éventuellement nulles :

- force de rappel exercée par un ressort de raideur $k \geq 0$, de longueur à vide L_0, de longueur L_0+x, où x sera donc l'abscisse de m comptée depuis le point L_0 : $\vec{F}_r = -k.\left(L_0 + x - L_0\right).\vec{u}_x = -k.x.\vec{u}_x$.
- force de frottements fluides $\vec{F}_f = -\alpha.\vec{v}_x$ où $\vec{v}_x$ est la vitesse instantanée du mobile et α une constante positive.
- force d'excitation extérieure sinusoïdale : $\vec{F}_e = F_e.\cos\left(\omega_e.t + \phi_e\right).\vec{u}_x$, où F_e est l'amplitude (positive), ω_e la pulsation et ϕ_e la phase de cette force.

Ces deux dernières forces ainsi que les dispositifs à l'origine de celles-ci ne sont pas représentés sur le schéma. En pratique, la force de frottement peut être créée en plaçant la masse m dans un fluide plus ou moins visqueux ; la force extérieure peut être obtenue par exemple en liant mécaniquement la masse m à un moteur, ou en appliquant un champ électrique à condition que la masse m porte également une charge électrique.

A l'instant initial (début de la simulation), le mobile est à l'abscisse x_0 et sa vitesse instantanée est $\vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$. Les mouvements de *m* seront décrits par rapport au référentiel {*0, Ox*}, qui sera supposé galiléen.

L'ensemble des paramètres apparaissant dans la partie supérieure du simulateur peut être modifié avant de lancer la simulation (*cliquer dans les zones vertes et taper la valeur souhaitée, dans les unités indiquées*). Une fois votre choix de paramètres fait, *cliquer sur la flèche bleue horizontale pour lancer la simulation* : le mobile se déplace en fonction des forces que vous aurez décidé de lui appliquer et une trace de l'évolution de sa position *x* en fonction du temps *t* est dessinée par le crayon dans la partie inférieure gauche. La partie inférieure droite contient le tracé du 'Portrait de phase' du système étudié, c'est-à-dire la courbe construite par la succession des points d'abscisse égale à la position *x* de *m*, et d'ordonnée égale à la vitesse v_x de *m* (par défaut, un zoom automatique permet de garder ce tracé à l'intérieur du cadre qui lui est consacré).
Pour arrêter la simulation, *appuyez sur la croix rouge*, et pour revenir au choix de nouveaux paramètres *cliquez sur la flèche incurvée orange*.

Exemple où le phénomène de résonance intervient :
-pont : le système est défini par le tablier du pont, soutenu par des piliers ; par construction, cet ensemble est flexible, déformable. La force d'excitation extérieure peut avoir pour origine la cadence rythmée d'un pas militaire lors d'un défilé. Ce phénomène de résonance se manifeste par des déformations très importantes du système lorsque la cadence a une fréquence proche de la fréquence propre du pont, pouvant donc conduire à la destruction du pont. Ce phénomène doit donc être pris en compte lors de la conception des ouvrages d'art, ou de leur utilisations (*e.g.* interdiction de défiler au pas sur les ponts).
⇒ Donnez d'autres exemples (en citant vos sources d'information) dans lesquels le phénomène de résonance intervient

Pour chacun des cas de figure suivants, expliquez qualitativement (*i.e* sans résoudre d'équation !) le comportement du mobile en fonction du temps ; vous devrez donc pour cela utiliser les principes et théorèmes de base de la Mécanique du Point.
Par ailleurs, l'évolution de m est reproduite dans ce simulateur en temps réel ; on peut donc mesurer des durées et les comparer aux valeurs des paramètres de la simulation (attention toutefois à ne pas lancer d'autres applications gourmandes en ressources pour votre ordinateur, le tracé de la simulation risquant alors d'être altéré).

Par exemple :
Cas 1)
m=0.1 k=0 α=0 F_e=0 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0 v_0=0
(les unités utilisées sont indiquées au début de ce document et apparaissent sur le simulateur)
Réponse :
Observation : le mobile ne se déplace pas ; la trace de sa position en fonction du temps est une droite parfaitement verticale (le crayon ne bouge pas) ; le portrait de phase ne contient qu'un point centré sur x=0 et v_x=0.
Interprétation/Explication : le mobile n'est soumis à aucune force ; étant initialement au repos (v_0=0) dans un référentiel galiléen il persiste donc indéfiniment dans ce même état de repos à l'abscisse x=0 (c'est le principe d'inertie).

Procédez de même pour l'ensemble des cas suivants, en dissociant *observation* et *interprétation*.

Deuxième partie : oscillations

I./ Approche qualitative

Cas 13)

m=0.1 k=0.1 α=0 F_e=0 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0 v_0=0

Observation :

Interprétation/Explication :

Cas 14)

m=0.1 k=0.1 α=0 F_e=0 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0.02 v_0=0

- ✓ Pour ce cas, effectuez une analyse dimensionnelle pour déterminer la relation liant la période du mouvement T aux caractéristiques du système : m, k, x_0.
- ✓ Mesurez la période du mouvement que vous observez à l'aide du simulateur, et à partir de cette valeur et des valeurs de m, k, x_0 déduisez-en la valeur numérique de la constante adimensionnelle intervenant dans l'expression de T.

Observation :

Interprétation/Explication :

Cas 15)

m=0.1 k=0.1 α=0 F_e=0 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0 v_0=0.015

Observation :

Interprétation/Explication :

- ✓ En faisant varier successivement m, k et v_0 à partir des valeurs données ci-dessus, déterminez expérimentalement le signe des puissances auxquelles doivent apparaitre ces quantités dans l'expression de l'allongement maximal du ressort.
- ✓ Effectuez une analyse dimensionnelle pour déterminer la relation liant l'allongement maximal du ressort aux caractéristiques du système : m, k, v_0.

Cas 16)

m=0.1 k=0.1 α=0.015 F_e=0 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0.02 v_0=0

Observation :

Interprétation/Explication :

Cas 17)

m=0.1 k=0.1 α=0.05 F_e=0 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0.02 v_0=0

Observation :

Interprétation/Explication :

Cas 18)

m=0.1 k=0.1 α=0.21 F_e=0 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0.02 v_0=0

Observation :

Interprétation/Explication :

Cas 19)

m=0.1 k=0.1 α=0 F_e=0.001 ω_e=0 ϕ_e=0 x_0=0 v_0=0

Observation :

Interprétation/Explication :

- ✓ En faisant varier successivement m, k et F_e à partir des valeurs données ci-dessus, déterminez expérimentalement le signe des puissances auxquelles doivent apparaitre ces quantités dans l'expression de l'allongement maximal du ressort.

- ✓ Effectuez une analyse dimensionnelle pour déterminer la relation liant l'allongement maximal du ressort aux caractéristiques du système : m, k, v_0.
- ✓ Donnez un exemple que vous avez rencontré en TD pour la force constante F_e.

Cas 20)

m=0.1 k=0.1 α=0 F_e=0.0001 ω_e=0.1 ϕ_e=0 x_0=0 v_0=0

Faites varier progressivement la pulsation de la force excitatrice ω_e entre 0 et 1.5 par pas de 0.1. Pour chaque cas mesurez la période du mouvement T_{mouv} en observant attentivement le portrait de phase (n'hésitez pas à agrandir le tracé !) et relevez l'abscisse maximale atteinte par la masse *m*. A l'aide du tableau suivant, montrez que la période du mouvement est celle qui est telle que :

$$T_{mouv} = n^* T_0 = m^* T_e \text{ avec } n \text{ et } m \text{ entiers premiers entre eux}$$

(c'est-à-dire que la période du mouvement résultant T_{mouv} est la période commune entre la force excitatrice (T_e) et l'oscillation propre du ressort (T_0)).

Rappel : $T_0=2\pi/\omega_0$ est la période propre du système {masse + ressort} avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

Attention : le cas ω_e=1 ne peut pas être simulé (une force de frottement est automatiquement ajoutée)

ω_e	x_{max} (m)	T_{mouv} (s)	n / m tel que n* T_0 = m* T_e (n* ω_e = m* ω_0)	T_{mouv} / T_0 ($T_0=2\pi/\omega_0$)
0	0.002	6	pas applicable	1
0.1				
0.2				
0.3				
0.4				
0.5				
0.6				
0.7				
0.8				
0.9				
1.1				
1.2				
1.3				
1.4				
1.5				

<u>Observation</u> :
<u>Interprétation/Explication</u> :

Cas 21)

m=0.1 k=0.1 α=0.01 F_e=0.0001 ω_e=0.1 ϕ_e=0 x_0=0 v_0=0

Faites varier progressivement la pulsation de la force excitatrice ω_e entre 0 et 1.5.

<u>Observation</u> :
<u>Interprétation/Explication</u> :

II./ Approche quantitative : Phénomène de résonance

On se propose de déterminer les caractéristiques du mouvement de la masse *m* pour le cas 21).

Soit un point matériel M de masse *m* assujetti à se déplacer le long d'un axe horizontal (Ox) et soumis uniquement aux forces suivantes :

- force de rappel $\vec{F}_r = -k.x.\vec{u}_x$ avec x l'abscisse de M comptée depuis O
- force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha.\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse instantanée de M
- force d'excitation $\vec{F}_e = F_e.\cos\left(\omega_e.t - \Phi_e\right)$

Le référentiel bâti sur l'axe (Ox) sera considéré comme galiléen.

1) Faire un schéma représentant l'axe et les forces agissant sur M pour une position quelconque de celle-ci.

2) Donner l'équation différentielle portant sur l'abscisse $x(t)$ de M.

3) On se place dans le cas de frottements faibles : en posant $\omega_0^{\ 2} = \dfrac{k}{m}$ et $\tau_0 = \dfrac{m}{\alpha}$ on a alors $\dfrac{1}{\tau_0^{\ 2}} < 4.\omega_0^{\ 2}$;

a) Montrer que l'équation différentielle obtenue à la question précédente s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau_0}.\dot{x} + \omega_0^{\ 2}.x = \frac{F_e}{m}.\cos\left(\omega_e.t + \Phi_e\right)$$

b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène (*i.e.* à second membre nul)

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau_0}.\dot{x} + \omega_0^{\ 2}.x = 0$$

associée à l'équation différentielle inhomogène (*i.e.* second membre non nul) du 3)a). On utilisera la notation $\omega_a = \omega_0.\sqrt{1 - \dfrac{1}{4.\omega_0^{\ 2}.\tau_0^{\ 2}}}$.

c) Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle inhomogène du 3)a)

On cherche une fonction $x(t)$ solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau_0}.\dot{x} + \omega_0^{\ 2}.x = \frac{F_e}{m}.\cos\left(\omega_e.t + \Phi_e\right)$$

<u>Méthode 'complexe' ou de l'affixe</u> : $x \to \underset{\sim}{x} = x + i.y$: $x = \Re e(\underset{\sim}{x})$: à la solution réelle $x(t)$ que l'on recherche on associe une solution complexe $\underset{\sim}{x}(t)$ de l'équation différentielle

$$\ddot{\underset{\sim}{x}} + \frac{1}{\tau_0}.\dot{\underset{\sim}{x}} + \omega_0^{\ 2}.\underset{\sim}{x} = \frac{F_e}{m}.e^{i.(\omega_e.t + \Phi_e)}$$

- ✓ Montrez qu'en prenant la partie réelle de l'équation différentielle précédente on retrouve l'équation différentielle portant sur $x(t)$.
- ✓ Montrez qu'une solution particulière 'évidente' de l'équation différentielle portant sur $\underset{\sim}{x}$ est:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{X}.e^{i.\omega_e.t} = X.e^{i.\phi_x}e^{i.\omega_e.t}$$

- ✓ Donnez l'expression de l'amplitude X et de la quantité $\tan(\phi_e - \phi_x)$ en fonction de F_e, m, ω_0, ω_e, τ_0.

d) Montrez qu'alors l'expression de la solution générale de l'équation différentielle portant sur $x(t)$ est :

$$x(t) = A.e^{-\frac{t}{2.\tau_0}}.\cos(\omega_a.t+\phi) + \frac{F_e}{m\sqrt{\left(\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+\left(\frac{\omega_e}{\tau_0}\right)^2\right)}}.\cos(\omega_e.t+\phi_x)$$

(on ne cherchera pas à expliciter les constantes A, ϕ et ϕ_x).

La solution $x(t)$ précédente montre que le système adoptera séquentiellement deux régimes :

- régime transitoire : pour les faibles valeurs de t : superposition des oscillations propres au système {masse+ressort+fluide} (en $\cos(\omega_a.t+\phi)$) et des oscillations à la pulsation de la force extérieure (en $\cos(\omega_e.t+\phi_x)$).
- régime permanent.

4) Montrez que pour les temps suffisamment longs ($t \to \infty$) seule l'oscillation à la pulsation de la force extérieure subsiste et définit le régime permanent.

5) Etude du régime permanent : on suppose que le dispositif étudié permet de varier la pulsation ω_e de la force excitatrice sans en changer l'amplitude F_e. On posera $u = \frac{\omega_e}{\omega_0}$,

$Q = \omega_0.\tau_0$

a) Déterminer l'expression de l'amplitude V de la vitesse instantanée $\dot{x}(t)$ de M ; La récrire en fonction de *u* et *Q* et tracer sa dépendance V(*u*) (on choisira par exemple Q=10 pour le tracé). Montrer que V admet un maximum pour *u*=1.

b) On constate donc que la masse *m* a une amplitude de vitesse maximale lorsque la pulsation de la force extérieure ω_e est égale à la pulsation propre du système oscillant ω_0. Pourquoi appelle t-on ce phénomène 'résonance' ?

c) Récrire l'amplitude X du mouvement en fonction de *u* (donc de ω_e) et tracez *X(u)* (on choisira par exemple Q=10 pour le tracé). Pour quelle valeur de *u* X est-elle extrémale ?